Bézier-Kurven

10. Februar 2012

1 Einführung

Die Kurve, auf der das Bobby Car auf dem Plakat zur Langen Mathenacht fährt, wurde mit dem Computerprogramm Paint entworfen. Hinter dem einfach handzuhabenden Kurven-Werkzeug steckt eine Menge moderner Mathematik. Nahezu alle modernen Grafikprogramme nutzen

Erfunden wurden die entsprechenden Grundlagen im Flugzeugbau und vor allem der französischen Automobil-Industrie, wo Paul de Casteljau (1959) bei Citroen und Pierre Bézier (1961) bei Renault unter strenger Geheimhaltung unabhängig voneinander mathematische Methoden zur Beschreibung fast aller Kurven und Flächenformen entwickelten. Das Ziel war die Abkehr von Tonmodellen als Designvorlagen von Freiformflächen und die Definition von Flächen durch numerische Daten, die von Maschinen „verstanden“ und umgesetzt werden konnten.



Abb. 1: Pierre Bézier (oben) und Paul de Casteljau entwickelten in den 60er-Jahren die Grundlagen für die Entwicklung von unsterblichen Designikonen, aber auch für moderne Grafikprogramme

Bézier-Kurven lassen sich im Allgemeinen nicht durch eine Funktionsvorschrift beschreiben (anders als z. B. Parabeln usw.). Es gibt aber Parameterdarstellungen, die aber sehr kompliziert und auf die so genannten „Bernsteinpolynome“ zurückgreifen (eine weitere Recherche könnte gut beim entsprechenden Wikipediabeitrag beginnen.

Glücklicherweise gibt es aber eine recht einfache Methode, Bézier-Kurven geometrisch zu konstruieren. Dies wollen wir im Folgenden mit Hilfe des Programmes Geogebra nachvollziehen.

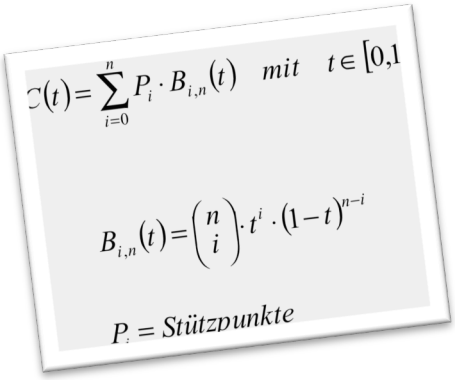


Abb. 2: Definition einer Bézier-Kurve n-ten Grades mit Hilfe der Bernsteinpolynome $B_{i,n}$

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

2 Konstruktion einer Bézier-Kurve mit Geogebra

Eine Bézier-Kurve verbindet zwei Punkte A und B. Ihre Gestalt wird durch die Lage von A und B sowie durch Steuerpunkte S_1, S_2 usw. bestimmt. Zuerst zeichnen Sie also zwei Punkte A und B und den Punkt S (im Eigenschaftsfenster können Sie Objekte umbenennen) und verbinden AS und BS mit einer Strecke. Zeichnen Sie dann irgendeinen Punkt C auf der Strecke AS. (Abb. 3)
Nun konstruieren Sie mit Hilfe der Strahlensätze den Punkt auf der Strecke SB, der SB im selben Verhältnis teilt, wie der Punkt C die Strecke AS teilt. Dazu verwenden Sie die Werkzeuge „Parallele Gerade“ und „Schneide zwei Objekte“. (Abb. 4)

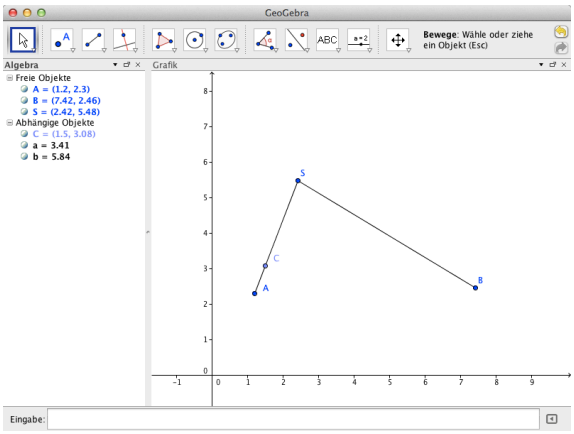


Abb. 3

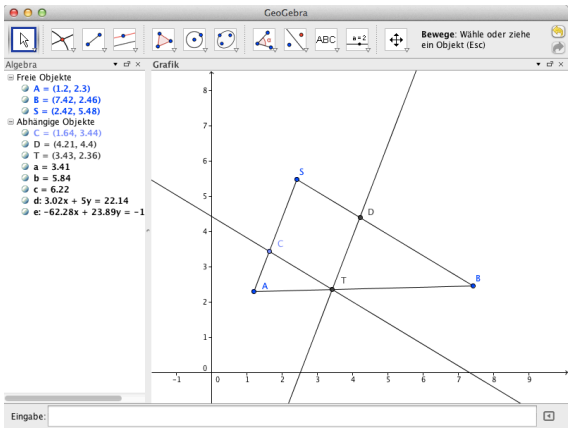


Abb. 4

Die Hilfsobjekte können Sie ausblenden (rechte Maustaste). Anschließend verbinden Sie C und D und konstruieren nach dem selben Muster den Punkt E, der CD wieder im selben Verhältnis teilt, wie C die Strecke AS teilt. (Abb. 5) Blenden Sie nun wieder alle Hilfsobjekte außer der Strecke CD aus. Bewegen Sie dann den Punkt C auf der Strecke AS, dann können Sie erkennen, dass der Punkt E eine Kurve beschreibt, an der die Strecke CD tangential anliegt. Sie können die Ortskurve des Punktes E wie folgt sichtbar machen: Tippen Sie einfach „Ortslinie[E, C]“ in die Eingabezeile. Die entstehende Kurve können Sie im Fenster Eigenschaften (rechte Maustaste) formatieren. (Abb. 6)

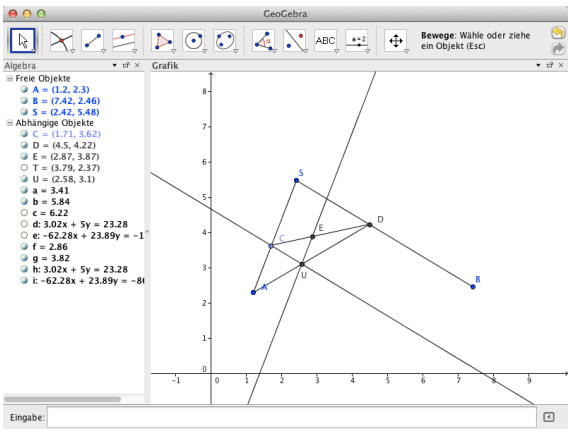


Abb. 5

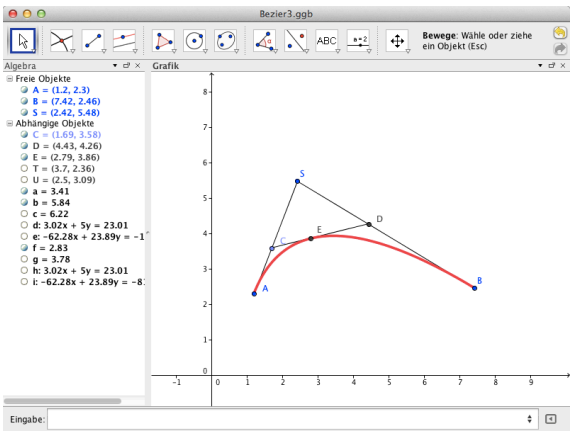


Abb. 6

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Die rote Kurve in Abb. 6 ist eine Bézier-Kurve 2. Grades. Wenn Sie den Steuerpunkt S bewegen, dann können Sie die Gestalt dieser Kurve vielfältig beeinflussen.

3 Konstruktion höhergradiger Bézier-Kurven

Noch flexiblere Kurven bekommt man, wenn man die Zahl der Steuerpunkt erhöht. Um die entsprechende Konstruktion übersichtlich und einfach zu gestalten, konstruieren wir dazu ein eigenes Werkzeug in Geogebra, das die Streckenteilung vereinfachen wird.

Die Grundidee des Werkzeuges ist zunächst, den Teilpunkt einer Strecke unabhängig von der konkreten Konstruktion zu machen. Dazu wird die Ausgangskonstruktion nach Abbildung 7 erweitert; die Grundlage bilden wiederum die Strahlensätze. Die Lage des Teilpunktes P der Strecke EF wird auf die Strecke AS übertragen.
Anschließend sollten alle Hilfsobjekte ausgeblendet werden, damit die Konstruktion nicht überfrachtet wird. Wenn Sie nun den Punkt P auf EF bewegen, folgt ihm der Punkt D auf AS „wie von Geisterhand“.
Nun konstruieren Sie das neue Werkzeug wie folgt: Klicken Sie in der Menüleiste auf „Werkzeuge: Neues Werkzeug erstellen ...“. Wählen Sie dann analog zu Abbildung 8 die Objekte, die konstruiert werden sollen; die Auswahlliste bezieht sich dabei auf die vorherige Konstruktion des Punktes D.

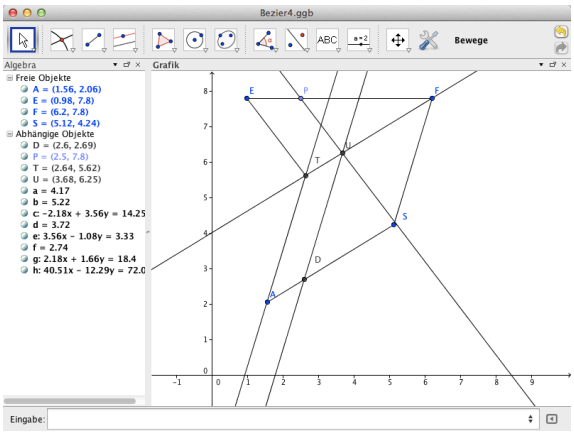


Abb. 7

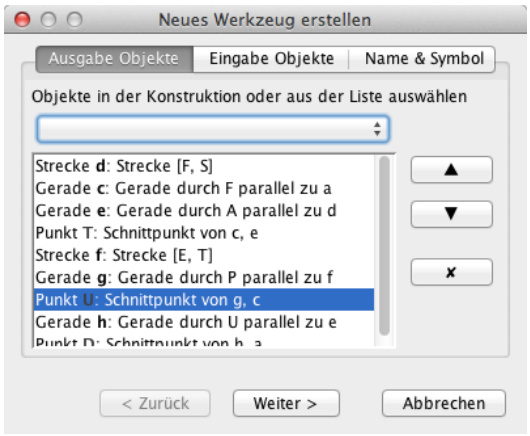


Abb. 8

Im folgenden Fenster „Eingabe Objekte“ müssen Sie angeben, mit welchem „Input“Ihr neues Werkzeug startet (Abb. 9); hier sind es die Punkte E, F, P, A und S. Die Reihenfolge dieser Punkte ist für die spätere Bedienung des Werkzeuges wichtig; Sie klicken später also auf E, F und P und dann auf den Startpunkt und den Endpunkt der Strecke, deren Teilpunkt Sie konstruieren wollen. – Anschließend können Sie noch einen Namen für das neue Werkzeug angeben.
Mit diesem Werkzeug können Sie rasch die Konstruktion einer Bézier-Kurve 2. Grades wiederholen, oder die Konstruktion einer Bézier-Kurve 3. Grades wagen. (Abb. 10) Auch höhergradige Bézier-Kurven, deren Konstruktion stets dem gleichen Muster folgt, sind nun kein Problem mehr.

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012

Wenn Sie anschließend noch die Anzeige aller Hilfsobjekte ausschalten, und nur die Anfangs-, End- und Kontrollpunkte sowie die Kurve sichtbar lassen, haben Sie ein intuitiv zu bedienendes Werkzeug zur Gestaltung zahlreicher Kurvenformen geschaffen, wie es auch in Photoshop usw. zu finden ist.

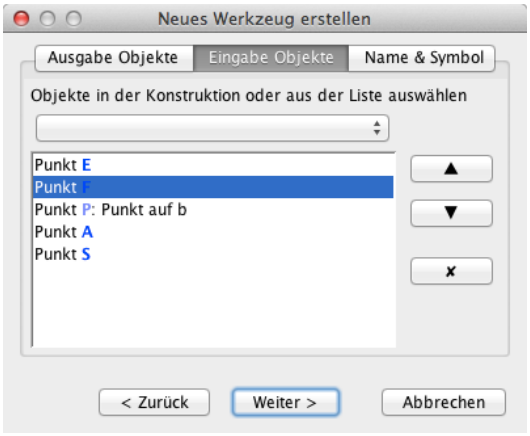


Abb. 9

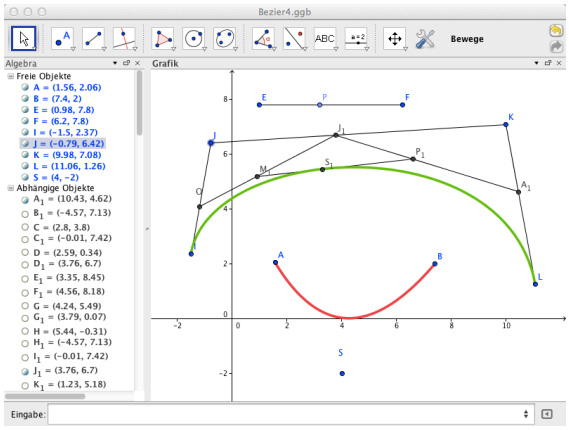


Abb. 10

4 Ausblick

NURBS, SPlines usw.
Mathematica
Kunst

5 Literatur und Downloadmaterial

Wolfgang Löding und Hubert Weller, Design – schöne Kurven am Computer. Mathe-Welt. Beilage aus mathematik lehren, H. 130, Velber 2005
http://goessner.net/download/learn/mwt/ws2005/presentations/BezierSplines.ppt

Zum Download auf www.langemathenacht.de:

bezier2.ggb: Mit dieser Datei können Sie etwas spielen; lassen Sie mit dem Befehl „Ortslinie“ die Ortslinie verschiedener Punkte anzeigen, verändern Sie die Lage der Punkte usw. Sie können sehr einfach eine Bézier-Kurve 4. Grades erstellen.

bezier3.ggb: Diese Datei ist die zum Abschnitt 2 dieses Moduls gehörige Konstruktionsdatei.

bezier4.ggb: Hier finden Sie die Datei zu Abschnitt 3 des Moduls. Wenn Sie die Hilfsobjekte anzeigen lassen wollen, klicken Sie in der linken Spalte mit der rechten Maustaste auf die einzelnen Objekte.

© Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf 2012